

**М.М. ТКАЧУК****БАЗОВІ ПІДХОДИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ РЕАКЦІЇ ВОЛОКОННИХ МАТЕРІАЛІВ НА ЗОВНІШНЄ НАВАНТАЖЕННЯ**

У роботі наведено аналіз сучасних підходів, методів та моделей, що застосовуються при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. Ставиться задача визначити властивості композиційних матеріалів у складі об'єктів військової техніки як результат моделювання статистичних наборів мікрочастинок у процесі взаємодії між собою. При цьому залучаються методи статистичного опису випадкових мікроструктур для урахування властивостей елементів, орієнтації та довжини волокон, амплітуди та кривизни нерівностей. Як напрямок подальших досліджень пропонується розвиток варіаційних методів мінімуму повної усередненої енергії для визначення механічної поведінки мікроструктури та обчислення гомогенізованих властивостей матеріалів за скінченних деформацій.

**Ключові слова:** випадкові мікроструктури, волоконні матеріали, статистична механіка, гомогенізація

**Н.Н. ТКАЧУК****БАЗОВЫЕ ПОДХОДЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕАКЦИИ ВОЛОКОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ВНЕШНЕЕ НАГРУЖЕНИЕ**

В работе приведен анализ современных подходов, методов и моделей, применяемых при исследовании реакции волокнистых материалов на внешнюю нагрузку. Ставится задача определить свойства композиционных материалов в составе объектов военной техники как результат моделирования статистических наборов микрочастиц в процессе взаимодействия между собой. При этом привлекаются методы статистического описания случайных микроструктур для учета свойств элементов, ориентации и длины волокон, амплитуды и кривизны неровностей. Как направление дальнейших исследований предлагается развитие вариационных методов минимума полной усредненной энергии для определения механического поведения микроструктуры и вычисления гомогенизированных свойств при конечных деформациях.

**Ключевые слова:** случайные микроструктуры, волоконные материалы, статистическая механика, гомогенизация

**М. ТКАЧУК****BASIC APPROACH TO ANALYSIS OF FIBROUS MATERIALS REACTION TO EXTERNAL LOADING**

The paper covers modern approaches, methods and models that are used for analysis of fibrous materials and their reaction to external loading. The properties of composite materials composing elements of military equipment are determined by modeling of statistical ensembles of microscopic structural parts interacting with each other. Methods of statistical description of random microstructures are employed in order to account for their random properties, fiber length and orientation, roughness amplitudes and curvatures. An extension of variational methods of minimum averaged energy is proposed for further studies aimed at the analysis of mechanical behavior of microstructures and computation of homogenized properties of materials at finite strains.

**Keywords:** random microstructures, fiber materials, statistical mechanics, homogenization.

**Вступ.** Забезпечення конструкційної міцності елементів машин військового і цивільного призначення часто вимагає залучення нових моделей поведінки матеріалів для більш адекватного і точного розрахунку напружено-деформованого стану (НДС).

Ця обставина диктується широким використанням і прогресуючою розробкою сучасних матеріалів, у т.ч. волокнистої структури, кераміки, металокераміки, багатошарових композицій тощо. Традиційні моделі не підходять для опису їх поведінки. Крім того, сучасний феноменологічний підхід у цьому випадку є недостатнім, тому що дає інформацію тільки для конкретного типу матеріалу в заданих умовах роботи та у скінченному діапазоні навантажень. У той же час перед механікою постають у цьому розрізі ширші завдання:

- визначення тенденцій зміни фізико-механічних характеристик залежно, наприклад, від складу і будови ланцюжків волоконних наповнювачів;
- створення композиційних матеріалів із заданими властивостями;
- пояснення часто неочевидних тенденцій у зміні фізико-механічних властивостей матеріалів при зміні хімічного складу, температури, технології виготовлення тощо.

Усі ці обставини висувають на перший план мік-

ромеханічні підходи, які надають можливості розрахунку фізико-механічних макрохарактеристик на основі розгляду поведінки мікроструктури матеріалу аж до моделей статистичної механіки волоконних ланцюжків. На теперішній час в світі цьому напрямку досліджень приділяється широка увага, зокрема, в відомих наукових школах університетів Штутгарта, Аахена, Мюнхена (ФРН); Павії (Італія); Стенфорда (США) та інших.

Однак розроблені до теперішнього часу підходи дають результати, що не повною мірою відповідають експериментальним даним і даним практичної експлуатації. Це пов'язано зі складнощами математичного моделювання поведінки статистично представницьких ансамблів, наприклад, волоконних ланцюжків або ниток матеріалу в матриці та у взаємодії з іншими нитками (наприклад, у так званих нетканих матеріалах). Таким чином, розробка нових підходів та формування на їх основі нових нелінійних математичних моделей для більш адекватного опису фізико-механічних властивостей матеріалів шля-

© М. М. Ткачук, 2018

хом аналізу поведінки на рівні статистичної механіки ансамблів волоконних ланцюжків, ниток, мікрозерен та тонких шарів є актуальною науково-технічною проблемою.

Таким чином, сформульована актуальна наукова і важлива для промисловості масштабна проблема забезпечення конструкційної міцності елементів машинобудівних конструкцій на основі розробки нових моделей і методів аналізу нелінійної поведінки матеріалів їх елементів з урахуванням мікроефектів взаємодії волоконних ланцюжків, мікрозерен, ниток та тонких шарів у об'ємі матеріалу. Це становить напрямок досліджень, описаних у роботі.

**Постановка задач досліджень.** Мета роботи – визначити шляхи підвищення службових властивостей елементів військової та цивільної техніки на основі створення теоретичних засад статистичної механіки композиційних матеріалів і формулювання математично строгих та фізично адекватних моделей поведінки множини мікрооб'єктів, що деформуються та взаємодіють між собою, а також визначення перспектив напрямку із розроблення варіаційних постановок задач дослідження таких статистичних ансамблів та нових моделей гомогенізації властивостей при переході з мікро- на макрорівень.

Для досягнення поставленої мети виконано аналіз фундаментальних теоретичних досліджень, здійснено порівняння методів і моделей для аналізу поведінки композиційних матеріалів. Зокрема, роботи були спрямовані на розв'язання наступних основних завдань.

1. Обґрунтування на основі аналізу існуючих методів шляхів розробки наукових засад поведінки композиційних волоконистих матеріалів при навантаженні.

2. Аналіз математичних моделей поведінки волоконистого матеріалу виходячи з мікрорівня статистичних ансамблів мікроелементів, які перебувають у взаємодії між собою.

3. Аналіз варіаційних формулювань, які відображають поведінку статистичного ансамблю мікроелементів при дії навантаження.

4. Обґрунтування на основі здійсненого аналізу шляхів та перспективних засобів розв'язання низки прикладних задач.

Нижче наведено опис цих етапів на прикладі волоконних матеріалів.

**Аналіз методів і моделей для дослідження властивостей матеріалів елементів машинобудівних конструкцій на основі мікроструктурних моделей поведінки матеріалу.** У роботі проведено аналіз методів і моделей мікроефектів волоконних мереж. Мережеві мікроструктури властиві багатьом матеріалам штучного, а також природного походження. Еластомери [1], гідрогель і м'які біологічні тканини [2–4] (рис. 1), неткані матеріали та піни [12–14] (рис. 2–4) – усі ці матеріали на мікроскопічному рівні складаються з подовжених одновимірних елементів, які можна в цілому охарактеризувати як волокна.

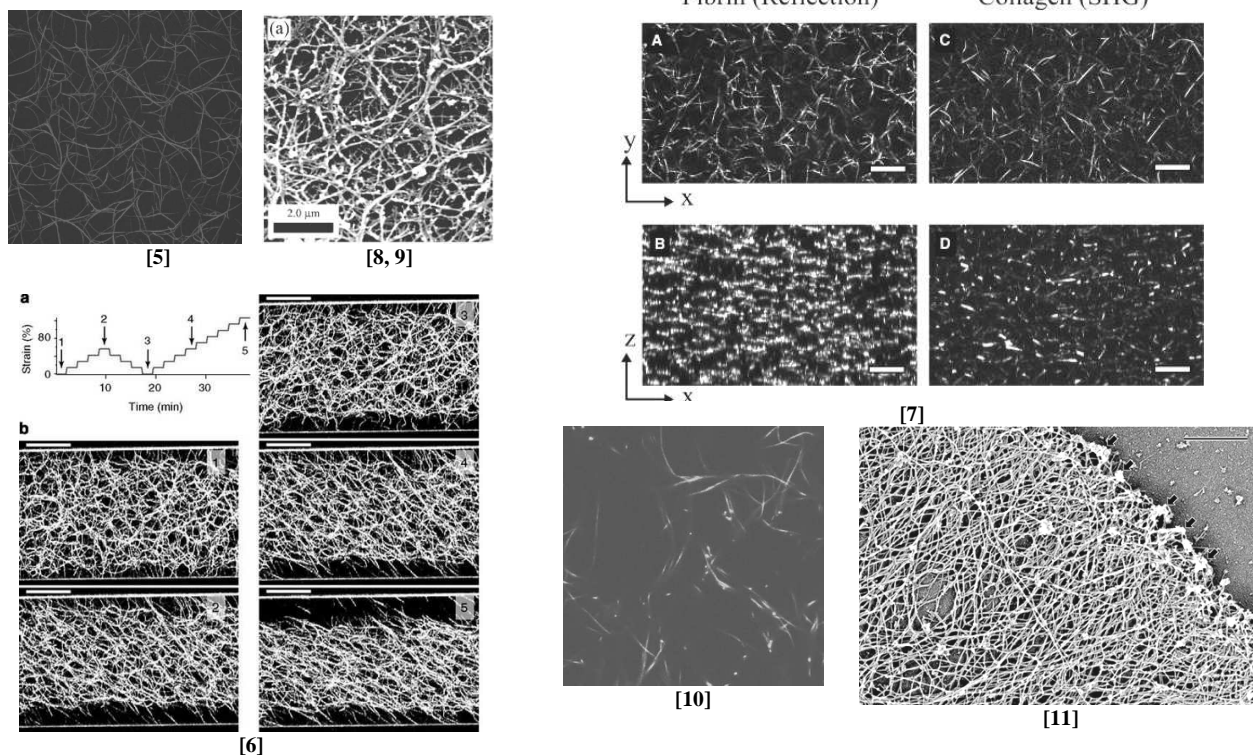


Рис. 1 – Приклади мережевої мікроструктури волоконистих матеріалів: біополімери [5–11]

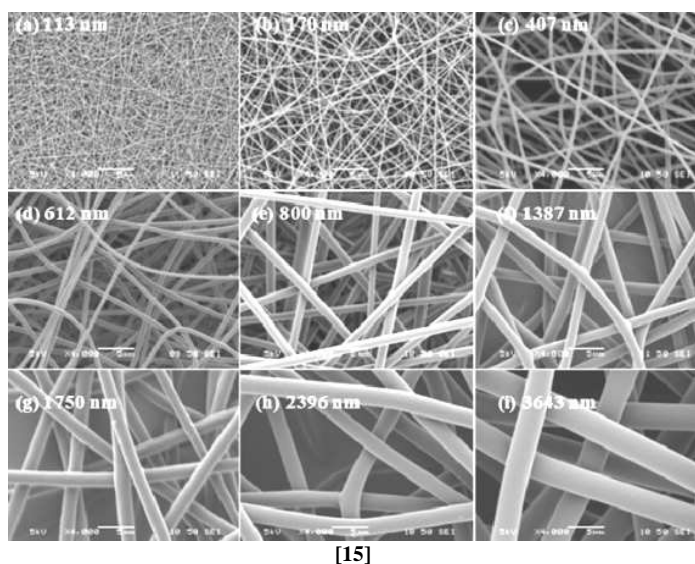
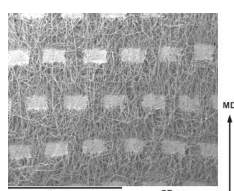
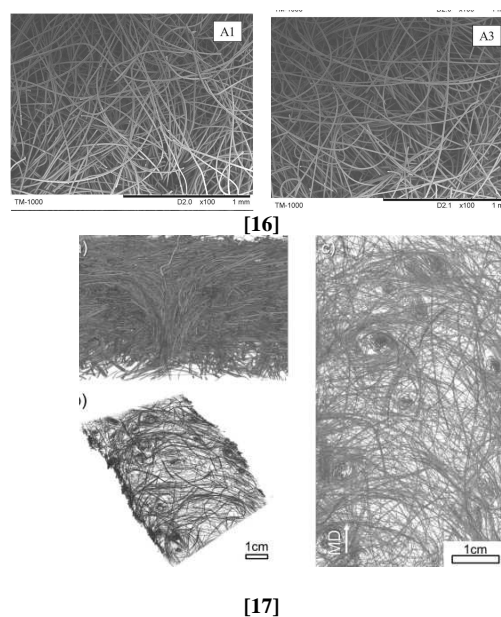
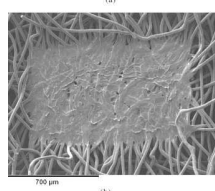


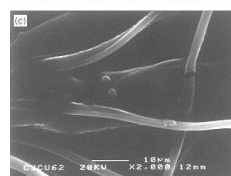
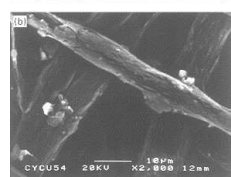
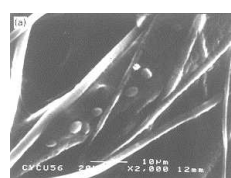
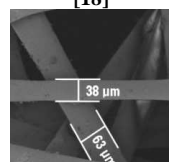
Рис. 2 – Приклади мережевої мікроструктури волокнистих матеріалів: пробивні неткані матеріали [15–17]



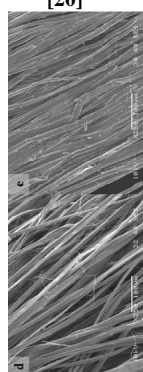
[18]



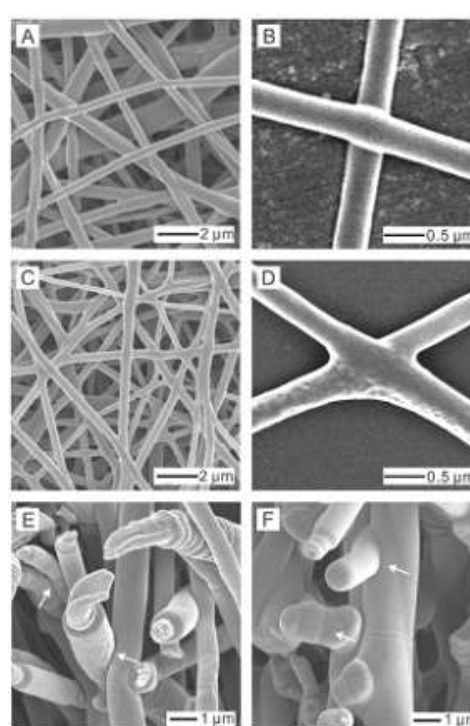
[19]



[20]



[21]



[22]

Рис. 3 – Приклади мережевої мікроструктури волокнистих матеріалів: термічно та хімічно поєднані неткані матеріали [18–22]

Існуючі теорії та моделі випадкових мереж у літературі, можна класифікувати, як це здійснено у табл. 1. Перша категорія містить у собі дискретні моделі, які відтворюють мікроструктуру в деталях. Такий підхід дає можливість досліджувати мережі різної природи і виявляти вплив різних специфічних

явищ, таких як ентропійний та ентальпійний відгук волокон на осьове розтягнення або їх вигин [29–31], початкові внутрішні напруження [32, 33] або теплові флуктуації місць з'єднань волокон [34].

Завдяки цій будові вони можуть набувати унікальних властивостей, здатності розтягуватися зі збе-

реженням міцності (рис. 5). Коли ці м'які матеріали піддаються макроскопічній деформації, відповідним чином деформується і мікроструктура. Сили, що створюються деформованими нитками, а також їх взаємодія всередині нерегулярної тривимірної мережі, складають макроскопічний відгук матеріалу, що в свою чергу визначається механічними напруженнями. Відповідно, знання про мікомеханіку випадкових мереж є вкрай важливим для розуміння таких механічних властивостей, як еластичність, що демонструються вищевказаними м'якими матеріалами. Ці мережі, по суті, є дискретними механічними системами, де окремі волокна є основними структурними одиницями.

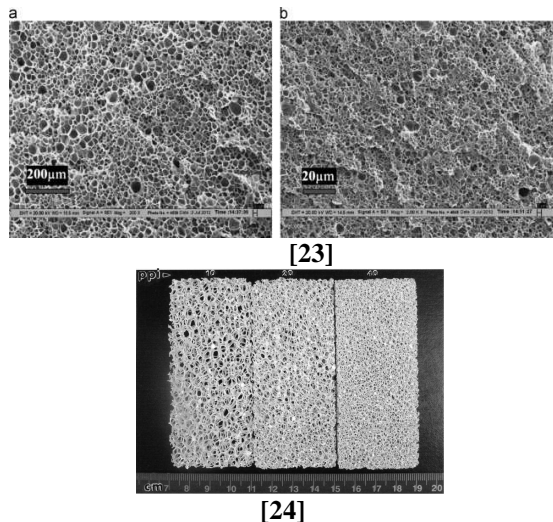
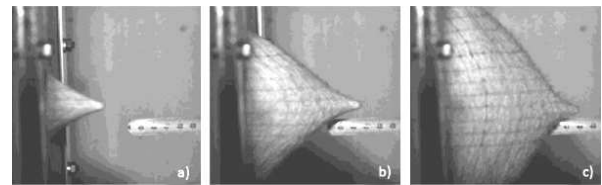


Рис. 4 – Приклади мережевої мікроструктури волокнистих матеріалів: мікропористі метали та полімери [23, 24]

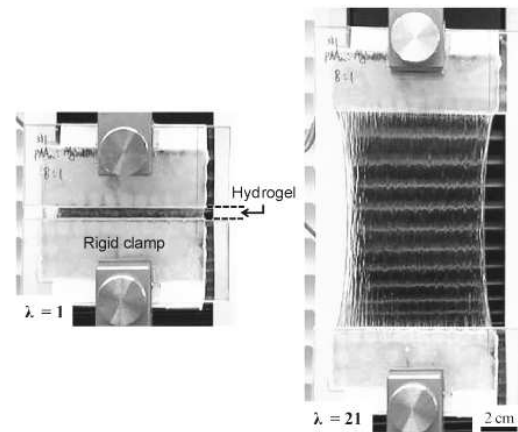
Моделювання мікомережі забезпечує глибоке розуміння мікроскопічних механізмів, які відповідають за загальну макроскопічну поведінку цих м'яких матеріалів. Тим не менш, вони часто вимагають великих обчислювальних витрат, а їх результатам властива статистична похибка, яка відрізняється від однієї випадково генерованої мережі до іншої.

Альтернативний клас моделей, наведених у табл. 1, заснований на підході осереднення для опису випадкових мереж. Вони зазвичай використовуються для обчислення поведінки матеріалу у скінченно-елементному моделюванні суцільних тіл. Ці теорії розглядають великі мікроскопічні мережі у термінах осереднених розподілів замість їх детальної дискретної будови. Зокрема, розглядаються розподіли величин, які описують мікродоформації мережі. Їх зв'язок із макроскопічною деформацією, яка є основним зовнішнім впливом на матеріал, є ключовим питанням, яке вирішується у цих осереднених моделях по-різному. Очевидне припущення полягає в тому, що мікродоформації та визначувані статистичні розподіли змінюються за афінним співвідношенням згідно градієнту деформації твердого

тіла. До такого підходу вдаються класичні теорії пружності каучука Куна і Грюна [35] або Трелоара і Рідінга [36], а також багато інших більш сучасних моделей еластомерів та інших волокнистих матеріалів.



нетканый текстиль з поліетиленових волокон для балістичного захисту [25, 26]



надзвичайно гнучкий та міцний гідрогель, утворений із іонно зшитого альгінату та ковалентно зшитого поліакриламідом [27]

Рис. 5 – Унікальні властивості волокнистих матеріалів

Завдяки простоті афінних співвідношень у багатьох випадках можливо обчислити осереднені напруження як функцію макроскопічних деформацій у аналітичній формі. Крім вищезгаданих теорій пружності гуми, з яких безпосередньо випливають співвідношення неогуківського матеріалу, можна навести приклад аналітичних моделей пружності і міцності для паперу [36].

Одночасно з цим навколо афінної кінематики мікродоформацій волокон побудовано багато чисельних моделей, переважно об'єднаних загальним підходом. Він полягає в тому, що сукупність волокон у сітчастій мікроструктурі асоціюється із простором їх орієнтацій в деформованій конфігурації, так званий мікросфері [45]. Кожна окрема точка на цій сфері визначає одиничний вектор первинної орієнтації певної частки волокон у мікроструктурі. Якщо прийняти припущення, що поведінка однаково орієнтованих волокон збігається, тоді всі мікроскопічні величини можна розглядати як однозначні функції, визначені на мікросфері. Так, наприклад, в межах афінної кінематики подовження волокон визначається як норма вектора орієнтації в метриці тензора деформацій Гріна. Такий підхід дає змогу визначати осереднений відгук матеріалу на деформації шляхом інтегрування

на мікросфері енергії подовження волокон. Обчислення осереднених величин відбувається з використанням спеціальних квадратурних формул на одиничній сфері, таких як запропоновані у [46]. Квадратурні точки утворюють у просторі орієнтацій дискретну структуру, яка наближає розподілену у

всіх можливих напрямках систему волокон до оригінальної мікроструктури. Кожний окремий дискретний напрямок можна подати як сконцентрований пучок волокон, який представляє певну частку сітки і має відповідну вагу у загальній структурі.

Таблиця 1 – Огляд випадкових мережевих моделей

Посилання	Геометрія	Кінематика	Мікромеханіка
<i>Дискретні моделі</i>			
[29–34]	Випадковим чином генерується дискретна сітка волокон	Розтягування і вигин волокон за відповідними ступенями вільності	Загальна деформація мережі досягається в статичній або термодинамічній рівновазі
<i>Усереднені мережеві моделі</i>			
[35–38]	Статистичний розподіл геометричних параметрів волокон у мережі	Поздовжнє розтягування волокон з цього розподілу	Афінний розподіл розтягування мікрОВОЛОКОН
[39–42]	Вісім волокон, розташованих на діагоналях паралелепіпеда	Ідентичне розтягування всіх восьми волокон у репрезентативному осередку	Розтягування сторін осередка відповідно до напрямів і значень головних деформацій
[43, 44]	Повний ізотропний розподіл волокон за їх початковими орієнтаціями	Поздовжнє розтягування волокон як функція їх первинної орієнтації	Неафінна мікродеформація визначається з принципу мінімуму осередненої енергії

Незважаючи на всі переваги простоти такого підходу, є досить очевидним, що обмеження афінними деформаціями є занадто жорсткими для неупорядкованих мереж з безліччю ступенів свободи. Про недосконалість використовуваних припущень свідчать також і експериментальні дані [47], а також результати дискретного моделювання випадкових мереж [30, 31]. Багато явищ і властивостей, притаманних м'яким речовинам, жодним чином не узгоджуються з тим, що передбачається афінними мікромеханічними моделями. Зокрема, розбіжність з афінною теорією демонструє поведінка еластомерів при істотному одноосовому і двовісних розтягненнях, адже вона не пояснює різниці границі, на якій відбувається різке зростання пружного модуля матеріалу між цими двома типами навантаження, яка спостерігається в експериментах [43, 47, 48]. Ця обставина заважає використанню неогуківської моделі при деформаціях, що перевищують 50%. Іншим прикладом може служити поведінка біологічних гелів, що складаються з напівгнучких волокон. Перехід від м'якого режиму цих матеріалів, пов'язаного з вигином волокон, до посилення пружного відгуку, коли волокна починають випробовувати поздовжнє розтягання, також не відповідає афінним припущенням, за якими волокна скорочуються або подовжуються при будь-яких ненульових деформаціях [30–32, 49]. Для наведених прикладів розбіжність експериментальних спостережень із теоретичним прогнозом становить для афінної кінематики не

просто кількісну відмінність, а й досягає якісного розриву.

Істотна неафінність мікродеформацій у матеріалах з волокнистою мікробудовою викликана особливостями механічного відгуку волокон та їх взаємодії в мережі одночасно з неоднорідністю і нерегулярністю дискретної мікроструктури, що містить безліч ступенів вільності. Ця внутрішня свобода передбачає можливість для волоконної мережі слідувати макроскопічній деформації багатьма способами, відмінними від афінної траєкторії. Визначення адекватних кінематичних співвідношень становить головне завдання мікромеханічних обґрунтованих моделей для м'яких матеріалів з мережевою мікробудовою.

Існує кілька підходів до урахування неафінних деформацій мікрОВОЛОКОН. Найпростіші з них штучно подають матеріал у точці еквівалентною тривимірною структурою. Ця структура може складатися з трьох груп волокон, орієнтованих уздовж головних напрямків деформації [50], або чотирьох [51], спрямованих в кути піраміди, або восьми, розташованих на діагоналях куба, як було запропоновано Арруда і Бойс [39]. Остання набула найбільшого поширення завдяки простоті виразу щодо першого інваріанта тензора деформацій, а також високій точності наближення реальної поведінки гуми при малих і великих ушкодженнях.

Проте, такі штучні конструкції, які представляють деформації мереж, істотно обмежують коло

властивостей, які можна за їх допомогою змодельовувати. Набагато більш універсальною виявилася відома неафінна модель мікросфери, яка була запропонована Міє і співавторами в роботі [43]. Ця модель розглядає повний простір орієнтацій волокон, однак, на відміну від раніше запропонованих підходів, при цьому відмовляються від прямих співвідношень між макроскопічною деформацією і мікроскопічними деформаціями волокон. Осьове подовження при цьому визначається як невідома функція на мікросфері орієнтацій, варіація якої обмежується кінематичними умовами зв'язку. Запропоноване кінематичне співвідношення засноване на феноменологічних міркуваннях без відповідного фізичного обґрунтування та містить штучний додатковий параметр.

Для визначення невідомих мікроедеформацій у рамках цього підходу застосовується принцип мінімуму, а саме за дійсні подовження волокон приймаються такі, які мінімізують осереднену енергію

деформації сітки за умови виконання вищевикладеного кінематичного обмеження. У випадку гумоподібних матеріалів енергія розтягування макромолекулярних ланцюжків є опуклою функцією, отже, задача умовної мінімізації має єдиний розв'язок за будь-яких накладених макродеформацій. Більш того, для запропонованого кінематичного співвідношення в роботі [43] розв'язок можна отримати у замкненій формі незалежно від моделі розтягування ланцюгів. Показово, що при певному значенні додаткового параметра цей вираз для розтягування виявляється ідентичним тому, який постулюється восьмиланковою моделлю [47]. Внаслідок цього розв'язком, крім мінімуму осередненої енергії, також визначаються і осереднені механічні напруження, а також пружний модуль матеріалу за скінченними деформаціями. Всі ці величини обчислюються за відомими квадратурними формулами [46, 52, 53].

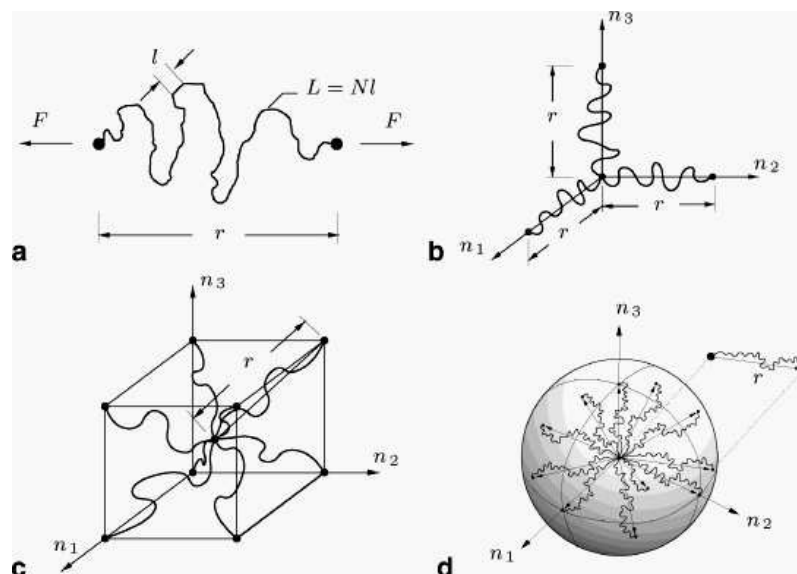


Рис. 6 – Схематичне зображення різноманітних мережевих моделей: триланкової та восьмиланкової моделі, а також мікросферної моделі [28]

Завдяки досить гнучкому формулюванню неафінної моделі, в її рамках на додаток до осьового розтягування може бути урахування і поперечного стиснення полімерних ланцюгів за так званою трубною теорією пружності еластомерів, яка розглядає взаємні обмеження поперечного руху ланцюгів у полімерних мережах [54, 55], як це показано на рис. 7. З цією метою досліджуються додаткова кінематична величина стиснення мікротрубки, яка прив'язується до макроскопічних деформацій площин за допомогою співвідношень, аналогічних тим, які отримані в моделі для осьових розтягувань. Саме завдяки цьому компоненту вдається відтворити характерний S-подібний вигин кривої пружності, який демонструють натуральні та синтетичні каучуки.

Також на мікросфері можуть визначатися й

інші мікромеханічні змінні, за допомогою яких можуть бути описані різні властивості ланок та їх поведінка. Зокрема, авторами оригінального підходу модель була поширена на явища в'язкопружності [56] (див. рис. 8), ефект пошкодження Мюллера [57] і пластичності [58–60].

Такі складні процеси, як ремоделювання м'яких тканин, простіше описуються в рамках восьмиланкової моделі, у яку додається змінна трансверсальної анізотропії [61, 62]. Для опису пружності кров'яних судин у роботі [63] використовується осереднення на мікросфері в межах афінної кінематики, причому анізотропія цих тканин подана неоднорідною щільністю розподілу орієнтацій різних типів волокон. У [64, 65] через зміни цього розподілу в часі визначається ремоделювання м'яких тканин.

Афінна кінематика застосовується і в моделях

актинових мереж, у яких додатково розглядається податливість з'єднуючих протейнів [66] і відносне ковзання філаментів у з'єднаннях [67].

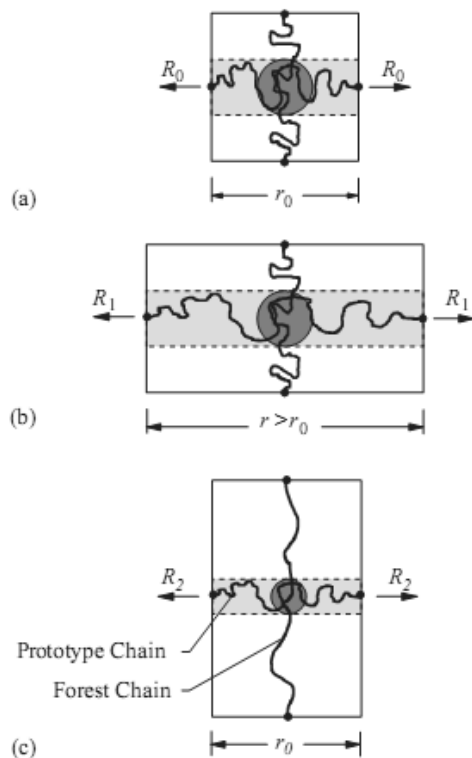


Рис. 7 – Урахування механізму обмеження бічного руху макромолекул в моделі неафінної мікросфери [45]

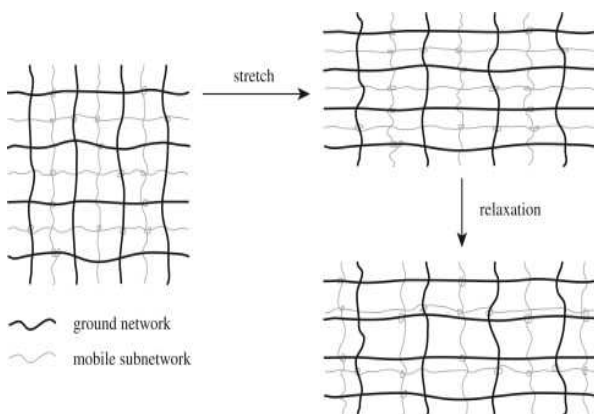


Рис. 8 – Мікромеханічний механізм в'язкопружності на основі механізму релаксації незшитих полімерних ланок [56, 58]

У роботах [68–70] явище кристалізації гуми при розтягуванні моделюється у межах повністю афінної кінематики, для кожної орієнтації пропонується одновимірна термодинамічна модель кінетики процесів, осередненими звичайними процедурами на мікросфері. Деякий інший підхід [44] передбачає певну ступінь неафінності деформацій, яка регулюється окремою складовою штрафу у записі енергії.

У роботах [71] та [72] використовують неафінну модель мікросфери Міє та ін. [43] (схема останньої подана на рис. 9).

Для моделювання в'язкопружної поведінки застосовуються як неафінні [73], так і афінні [74] моделі осереднення мереж. Разом із тим залишається привабливою модель в'язкопружності Бекстром і Бойс [75, 76], яка заснована на восьмигранковому поданні деформації.

Мікромеханічні моделі пошкодження гумоподібних матеріалів і біологічних тканин переважно ґрунтуються на афінному розтягуванні волокон [31, 77]: волокна, орієнтовані ближче до напрямку головного навантаження, відчувають (досягають початку) руйнування раніше інших волокон.

**Визначення перспективних методів та моделей досліджень.** Таким чином, як видно із описаного аналізу, у літературі натеper не існує єдиного підходу у моделюванні матеріалів із мережевою мікроструктурою. Це призводить до необхідності розвитку нових підходів. Наприклад, як варіант у цій роботі пропонується подальше вдосконалення запропонованого варіаційного підходу до гомогенізації матеріалів з сітчастою будовою, пов'язаного з уточненням кінематичних мікро- і макроспіввідношень. У роботі [78] було запропоновано визначати мікродеформації волокон повним вектором подовження, який, на відміну від попередніх моделей, обмежувався тільки абсолютним скалярним значенням розтягування. На додаток цей вектор містить інформацію про те, яким чином волокна повертаються (обертаються) при деформації мереж. Було запропоновано нове кінематичне співвідношення, яким встановлюється зв'язок між значеннями вектора мікродеформацій на мікросфері і макроскопічною деформацією матеріалу. При цьому воно отримало належне обґрунтування з боку статистичної теорії так званих шляхів максимального просування у випадковій мережі. У результаті отримані співвідношення явно враховують таку важливу властивість волоконних мереж, як їх поєднаність. Зокрема, для мереж із функціональністю чотири, відповідних хімічно зшитим молекулам еластомерів, отримана компактна тензорна форма кінематичного мікромакрорівняння, яка має цілком зрозумілу інтерпретацію. У рамках цього підходу принцип мінімуму осередненої енергії призводить до неоднорідних неафінних мікродеформацій, розподіл яких залежить безпосередньо від властивостей ланок мережі та їхніх параметрів. Розподіл цих мікродеформацій на дискретизованій мікросфері отримується шляхом чисельного розв'язання нелінійної задачі умовної мінімізації. Осереднені механічні напруження отримуються із розв'язку про визначення векторів осьових сил у волокнах. Перевагою такого підходу є найбільш точне з існуючих неафінних моделей урахування механізму перерозподілу деформацій у мережі.

У подальшому запропоновані підходи плануються розвинути для розв'язання низки прикладних задач.



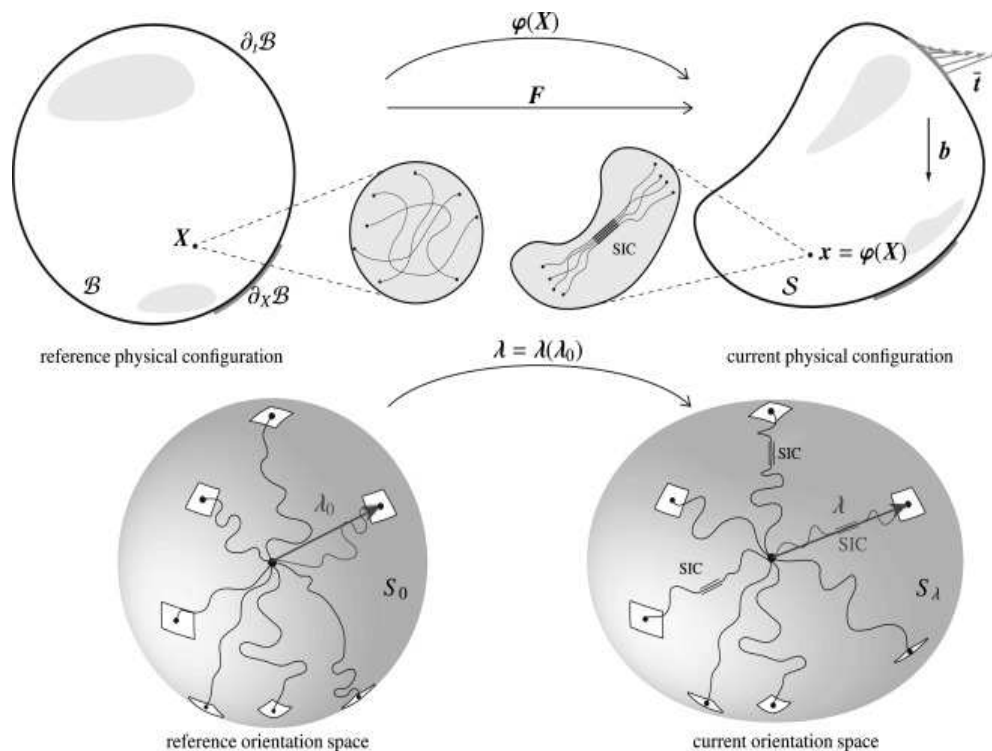


Рис. 9 – Механізм кристалізації гуми при розтягуванні та його урахування [72] в межах моделі неафінної мікросфери

**Висновки.** На основі проведеного аналізу сучасного стану методів та моделей для досліджень реакції волоконних матеріалів на дію зовнішнього навантаження установлені наступні особливості.

1. Підтверджена неможливість застосування традиційних моделей до моделювання поведінки волоконистих та пористих матеріалів унаслідок мікродисипації механічної енергії та необхідність у зв'язку із цим переходити до інкрементальних постановок.

2. Прогнозовано різке зростання адекватності і точності моделювання поведінки композитних матеріалів із залученням запропонованих нових методів та моделей на основі удосконалених варіаційних постановок.

3. Відзначено перспективність об'єднання моделей поведінки матеріалу на мікро- та макрорівні шляхом застосування удосконалених моделей гомогенізації властивостей.

Крім того, знайшли своє підтвердження наступні гіпотези:

- про сильну залежність фізико-механічних властивостей волоконистого матеріалу від деформацій та, що суттєво, трансляційних взаємних зміщень волокон одне відносно одного;
- про слабку залежність дисипації механічної енергії у вузлах взаємодії волокон від швидкості процесу взаємного зміщення;
- про часткову незворотність процесів деформування композиційного матеріалу на мікро- та макрорівні.

Таким чином, можна зробити узагальнюючий висновок про те, що для вирішення окресленої у роботі

проблеми необхідно об'єднати на єдиних методологічних засадах методи статистичної механіки, класичної механіки суцільного середовища, матеріалознавства та моделі гомогенізації. Основою такого об'єднання є перспективні розробки, у першу чергу – варіаційна постановка задачі. У результаті такого поєднання реалізується принципова нова комплексна модель, яка володіє здатністю відображати на строгому математичному та фізично адекватному рівні якісні властивості та кількісні фізико-механічні характеристики композитів.

Принциповою новизною запропонованого підходу є інтеграція моделей різного масштабового рівня на основі статистичної механіки суцільного середовища. У результаті такого об'єднання досягається нова якість теоретичних засад для розв'язання цілої множини нових актуальних задач механіки композиційних матеріалів. Важливою рисою підходів, що запропоновані, є базування на строгих принципах термодинаміки, матеріалознавства, механіки, динаміки неконсервативних систем, тобто на фізичних законах, з одного боку, та строгих математичних формулюваннях задач математичної фізики (при побудові варіаційних постановок, при переході до співвідношень інкрементального типу, при обґрунтуванні дискретних моделей), – з іншого. Таким чином, створюються адекватні, коректні та точні моделі поведінки композиційних матеріалів, що відрізняє запропоновані підходи від традиційних, у яких використовуються різні спрощення та наближення.

Надалі планується числова реалізація структурно-нелінійних моделей матеріалів та розв'язання актуальних



прикладних задач.

# Список літератури / References (transliterated)

1. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. 3rd edition. Oxford: Clarendon Press, 1975. 322 p.
2. Lodish H. *Molecular Cell Biology*. Cambridge: W.H. Freeman & Company, 2000. – 973 p.
3. Boal D.H. *Mechanics of the cell*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 406 p.
4. Holzapfel G.A., Ogden R.W. *Mechanics of biological tissue*. New York: Springer Science & Business Media, 2006. – 135 p.
5. Schmoller K.M., Lieleg O., Bausch A.R. Internal stress in kinetically trapped actin bundle networks. *Soft Matter*, 2008, vol. 4(12), pp. 2365–2367.
6. Schmoller K. M., Fernandez P., Arevalo R. C., Blair D. L., Bausch A. R. Cyclic hardening in bundled actin networks. *Nature communications*, 2010, vol. 1, pp. 134.
7. Lang N. R., Münster S., Metzner C. [et al.] Estimating the 3D pore size distribution of biopolymer networks from directionally biased data. *Biophysical journal*, 2013, vol. 105(9), pp. 1967–1975.
8. Wen Q., Basu A., Winer J. P. [et. al.] Local and global deformations in a strain-stiffening fibrin gel. *New Journal of Physics*, 2007, vol. 9(11), pp. 428.
9. Basu A., Wen Q., Mao X. [et. al.] Nonaffine displacements in flexible polymer networks. *Macromolecules*, 2011, vol.44(6), pp. 1671–1679.
10. Stein A. M., Vader D. A., Jawerth L. M. [et. al.] An algorithm for extracting the network geometry of three-dimensional collagen gels. *Journal of microscopy*, 2008, vol. 232(3), pp. 463–475.
11. Ponti A., Machacek M., Gup-ton S.L. [et. al.] Two distinct actin networks drive the protrusion of migrating cells. *Science*, 2004, vol. 305(5691), pp. 1782–1786.
12. Hearle J.W.S., Thwaites J.J. Mechanics of flexible fibre assemblies. NATO advanced study institutes series. *Applied sciences*. Sijthoff & Noordhoff, 1980, pp. 293–310.
13. Picu R.C. Mechanics of random fiber networks-a review. *Soft Matter*, 2011. vol. 7, pp. 6768–6785.
14. Gibson L.J., Ashby M.F., Harley B.A. *Cellular Materials in Nature and Medicine*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 309 p.
15. Pai C. L., Boyce M. C., Rutledge G. C. On the importance of fiber curvature to the elastic moduli of electrospun nonwoven fiber meshes. *Polymer*, 2011, vol. 52(26), pp. 6126–6133.
16. Yu B., Zhao X., Zeng Y., Qi D. The influence of process parameters on needle punched nonwovens investigated using image analysis. *RSC Advances*, 2017, vol.7(9), pp. 5183–5188.
17. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., Llorca, J. Deformation and energy dissipation mechanisms of needle-punched nonwoven fabrics: A multiscale experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 64, pp.120–131.
18. Hou X., Acar M., Silberschmidt V.V. 2D finite element analysis of thermally bonded nonwoven materials: Continuous and discontinuous models. *Computational Materials Science*, 2009, vol. 46(3), pp. 700–707.
19. Ridruejo A., González C., Llorca J. Micromechanisms of deformation and fracture of polypropylene nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48(1), pp. 153–162.
20. Tyan Y.C., Liao J.D., Klauser R. [et. al.] Assessment and characterization of degradation effect for the varied degrees of ultra-violet radiation onto the collagen-bonded polypropylene non-woven fabric surfaces. *Biomaterials*, 2002, vol. 23(1), pp. 65–76.
21. Haverhals L.M., Reichert W.M., De Long H.C., Trulove P.C. Natural fiber welding. *Macromolecular Materials and Engineering*, 2010, vol. 295(5), pp. 425–430.
22. Li H., Zhu C., Xue J., Ke Q., Xia Y. Enhancing the Mechanical Properties of Electrospun Nanofiber Mats through Controllable Welding at the Cross Points. *Macromolecular Rapid Communications*, 2017, vol. 38(9).
23. Gandhi A., Asija N., Gaur K.K. [et. al.] Ultrasound assisted cyclic solid-state foaming for fabricating ultra-low density porous acrylonitrile–butadiene–styrene foams. *Materials Letters*, 2013, vol. 94, pp. 76–78.
24. Murr L.E., Gaytan S.M., Medina F. [et. al.] Next-generation biomedical implants using additive manufacturing of complex, cellular and functional mesh arrays. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 368(1917), pp. 1999–2032.
25. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., Llorca J. Numerical simulation of the ballistic response of needle-punched nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 106, pp. 56–67.
26. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., Llorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, vol. 111, pp. 55–65.
27. Sun J.Y., Zhao X., Illeperuma W.R. [et. al.] Highly stretchable and tough hydrogels. *Nature*, 2012, vol. 489(7414), pp. 133–136.
28. Ethiraj G., Miede C. Multiplicative magneto-elasticity of magnetosensitive polymers incorporating micromechanically-based network kernels. *International Journal of Engineering Science*, 2016, vol. 102, pp. 93–119.
29. Winkler R. Deformation of semiflexible chains. *J. Chem. Phys.*, 2003, vol. 118, pp. 2919–2928.
30. Huisman E., Storm C., Barkema G. Monte Carlo study of multiply crosslinked semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, pp. 051801(11).
31. Van Dillen T., Onck P.R., van der Giessen E. Models for stiffening in cross-linked biopolymer networks: A comparative study. *J. Mech. Phys. Solids*, 2008, vol. 56(6), pp. 2240–2264.
32. Onck P., Koeman T., T. van Dillen, E. van der Giessen Alternative explanation of stiffening in cross-linked semiflexible networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, pp. 178102(4).
33. Huisman E., Lubensky T. Internal stresses, normal modes, and nonaffinity in three-dimensional biopolymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106(8), pp. 088301(4).
34. Blundell J., Terentjev E. The influence of disorder on deformations in semiflexible networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2011, vol. 467, pp. 2330–2349.
35. Kuhn W., Gr $\ddot{u}$ n F. Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Colloid. Polym. Sci.*, 1942, vol. 101(3), pp. 248–271.
36. Cox HL The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British journal of applied physics*, 1952, vol. 3(3), pp. 72.
37. Storm C., Pastore F.C., MacKintosh T.C. [et. al.] Nonlinear elasticity in biological gels. *Nature*, 2005. vol. 435(7039), pp. 191–194.
38. Blundell J., Terentjev E. Affine model of stress stiffening in semiflexible filament networks. *ArXiv*, 2008, 0808.4088: 1–11.
39. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, vol. 41, pp. 389–412.
40. Kuhl E., Garikipati E.M., Arruda K. [et. al.] Remodeling of biological tissue: Mechanically induced reorientation of a transversely isotropic chain network. *J. Mech. Phys. Solids*, 2005, vol. 53(7), pp. 1552–1573.
41. Kuhl E., Menzel A., Garikipati K. On the convexity of transversely isotropic chain network models. *Philos. Mag.*, 2006, vol. 86(21–22), pp. 3241–3258.
42. Palmer J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the stress-strain behavior of F-actin filament networks. *Acta Biomater*, 2008, vol. 4(3), pp. 597–612.
43. Head D., Levine A., MacKintosh F. Deformation of cross-linked semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 91, 108102(4).
44. Kroon M. A constitutive model for strain-crystallising Rubber-like materials. *Mech. Mater.*, 2010, vol. 42(9), pp. 873–885.
45. Miede C., G $\ddot{u}$ ktepe S., Lulei F. A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, vol. 52, pp. 2617–2660.
46. B $\acute{a}$ zant Z.P., B.H. Oh Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1986, vol. 66, pp. 37–49.

47. Marckmann G., Verron E. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chem. Technol.*, 2006, vol. 79, pp.835–858.
48. Treloar L.R.G. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc.*, 1944, vol. 40, pp.59–70.
49. Heussinger C., Schaefer B., Frey E. Nonaffine rubber elasticity for stiff polymer networks. *Phys. Rev. E.*, 2007, vol. 76. – 031906(12).
50. James Hubert M. Guth Eugene Theory of the elastic properties of rubber. *The Journal of Chemical Physics*, 1943. vol. 11(10). pp.455–481.
51. Wang Ming Chen, Eugene Guth Statistical theory of networks of non-Gaussian flexible chains. *The Journal of Chemical Physics*, 1952, vol. 20(7). pp.1144–1157.
52. Ehret AE, Itskov M., Schmid H. Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations: a comparative study. *International journal for numerical methods in engineering*, 2010, vol. 81(2). pp. 189–206.
53. Verron Erwan Questioning numerical integration methods for microsphere (and microplane) constitutive equations. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 89. pp.216–228.
54. Deam R.T., Sam F. Edwards The theory of rubber elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1976, vol. 280(1296). pp.317–353.
55. Heinrich G., Kaliske M. Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity. *Computational and Theoretical Polymer Science*, 1997, vol. 7(3). pp.227–241.
56. Miehe C., Göktepe S. A micro-macro approach to rubber-like materials. Part II: the micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, vol. 53(10), pp.2231–2258.
57. Göktepe S., Miehe C. A micro-macro approach to rubber-like materials. Part III: The micro-sphere model of anisotropic Mullins-type damage. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, vol. 53(10), pp. 2259–2283.
58. Linder C., Tkachuk M., Miehe C. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59(10), pp. 2134–2156.
59. Miehe C., Joel Méndez Diez, S. Göktepe, Lisa-Marie Schänzel Coupled thermoviscoplasticity of glassy polymers in the logarithmic strain space based on the free volume theory. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48(13), pp. 1799–1817.
60. Miehe C., Göktepe S., Méndez Diez J. Finite viscoplasticity of amorphous glassy polymers in the logarithmic strain space. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46(1), pp.181–202.
61. Kuhl E., Menzel A., Garikipati K. On the convexity of transversely isotropic chain network models. *Philosophical Magazine*, 2006, vol. 86(21-22), pp.3241–3258.
62. Kuhl E., Garikipati K., Arruda E.M., Grosh K. Remodeling of biological tissue: mechanically induced reorientation of a transversely isotropic chain network. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, vol. 53(7), pp.1552–1573.
63. Alastrué V., Martínez M.A., Doblaré M., Menzel A. Anisotropic microsphere-based finite elasticity applied to blood vessel modelling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, vol. 57(1), pp. 178–203.
64. Menzel A. Waffenschmidt T. A microsphere-based remodelling formulation for anisotropic biological tissues. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2009, vol. 367(1902), pp. 3499–3523.
65. Waffenschmidt T. *Modelling and simulation of adaptation and degradation in anisotropic biological tissues*. Ph.D. Thesis. – 2013.
66. Holzapfel G.A., Unterberger M. J., Ogden R. W. An affine continuum mechanical model for cross-linked F-actin networks with compliant linker proteins. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 2014, vol. 38, pp.78–90.
67. Van Oosterwyck H. José F. Rodríguez, M. Doblaré, José M. García Aznar An affine micro-sphere-based constitutive model, accounting for junctional sliding, can capture F-actin network mechanics. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, 2013, vol. 16(9), pp.1002–1012.
68. Guille Joachim, Thien-Nga Lê, Patrick Le Tallec Microsphere model for strain-induced crystallization in rubber. *In Proceedings of the 8th conference on constitutive models in rubbers*. Taylor & Francis, 2013, pp. 467–472.
69. Guille Joachim, Thien-Nga Le, Patrick Le Tallec Micro-sphere model for strain-induced crystallisation and three-dimensional applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, vol. 81, pp.58–74.
70. Le Tallec P. Polymer modelling: from macroscopic hyperelasticity to strain induced crystallisation. *11th. World Congress on Computational Mechanics (WC CM XI) 5th. European Conference on Computational Mechanics (ECCM V) 6th. European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI) July 20–25, 2014, Barcelona, Spain*
71. Mistry Sunny J., Sanjay Govindjee A micro-mechanically based continuum model for strain-induced crystallization in natural rubber. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51(2), pp.530–539.
72. Rastak R., Linder C. A non-affine micro-macro approach to strain-crystallizing rubber-like materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018. vol. 111. pp.67–99.
73. Thylander S., Menzel A., Ristinmaa M. A non-affine electroviscoelastic microsphere model for dielectric elastomers: Application to VHB 4910 based actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2016, pp. 1045389X16651157.
74. Rey T., Chagnon G., Favier D., Le J.-B. Cam Hyperelasticity with rate-independent microsphere hysteresis model for rubberlike materials. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 90, pp.89–98.
75. Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, vol. 46(5), pp.931–954.
76. Dal Hüsni, Michael Kaliske Bergström–Boyce model for nonlinear finite rubber viscoelasticity: theoretical aspects and algorithmic treatment for the FE method. *Computational Mechanics*, 2009, vol.44(6), pp. 809–823.
77. Sáez P., Alastrué V., Peña E., Doblaré M., Martínez M.A. Anisotropic microsphere-based approach to damage in soft fibered tissue. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, 2012, vol. 11(5), pp. 595–608.
78. Tkachuk M., Linder Ch. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*, 2012, vol.92(22). pp. 2779–2808. Research Program: Computational modelling of adhesive contact 5

Надійшла (received) 15.11.2017

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О. О. Морозова", м. Харків, Україна, <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=50562166500>, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>, e-mail: m.tkachuk@tmm-sapir.org.